SBN VA1 1524912
4

QUATRIÈME LIVRAISON.

RÉFORME

DE

LA GÉOMÉTRIE,

PAR M. CHARLES BAILLY,

Auteur de la *Théorie de la Raison humaine*.

TRIGONOMÉTRIE RATIONNELLE.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

1857.

Digitized by Google


Digitized by Google

RÉFORME

DE LA GÉOMÉTRIE.

Trigonométrie rationnelle.

On désigne sous le nom de *Trigonométrie*, la partie de la géométrie, qui a principalement pour but, de trouver la valeur d'un certain nombre d'éléments d'un triangle, lorsque ce triangle est déterminé. Tout triangle dont on connaît les trois côtés, un côté et deux angles ou un angle et deux côtés, est déterminé. Ses côtés peuvent être formés par trois lignes droites qui se coupent deux à deux, ou par des arcs de grands cercles; de là deux sortes de triangles, les *rectilignes* et les *sphériques*; et, par suite, deux parties distinctes dans la trigonométrie qui est appelée *rectiligne* ou *sphérique* selon qu'elle s'occupe de l'une ou de l'autre espèce de triangles. Nous ne nous occuperons ici que de la *trigonométrie rectiligne*, car ce que nous en dirons se transportera de soi à la *trigonométrie sphérique*.

Quelle méthode allons-nous suivre pour arriver le plus promptement possible au but que nous nous sommes proposé d'atteindre? La nature même des questions que nous avons à traiter nous l'indique. Il est évident qu'il faut d'abord se placer dans le cas le plus facile, et voir quelle marche l'esprit choisit naturellement. Or ce cas est visiblement celui où il s'agit du triangle équilatéral, qui est déterminé par la con-

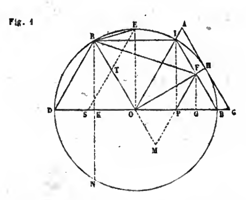
naissance de l'un de ses côtés. Alors comment trouverons-nous la valeur de trois éléments de ce triangle lorsque les trois autres éléments seront connus ? Il ne saurait y avoir de difficulté à répondre à cette question, et rien n'est plus facile que de trouver une réponse pour les différentes formes qu'elle peut prendre. Si les trois côtés sont donnés, on voit immédiatement que les angles sont *tiers*; si l'on donne au contraire un angle et deux côtés, la valeur des autres éléments s'ensuit d'une manière claire pour chacun, et l'on voit, sans la moindre peine, que pour le triangle équilatéral, la trigonométrie ne saurait poser une question à laquelle on ne puisse répondre aussitôt et sans que l'esprit ait besoin de se livrer à aucune recherche.

Supposons maintenant que le triangle que nous avons examiné devienne *scalène*, que l'angle au sommet reste *tiers*, et que nous ayons pour but de trouver la valeur du côté opposé. Ce problème est fort peu embarrassant, car nous avons vu en géométrie plane que le côté x, opposé à un angle *tiers*, était égal à la racine deuxième de la somme qu'on obtient en ajoutant les deuxièmes produits des deux autres côtés et de laquelle on retranche le produit de ces mêmes côtés : c'est-à-dire que l'on a : $x^2 = a^2 + b^2 - ab$.

Mais là ne s'arrête point la liste de tous les cas qui peuvent se présenter. Il pourrait se faire que le triangle équilatéral devînt *isocèle*, que l'angle au sommet augmentât ou diminuât, et que l'on eût à apprécier la longueur du côté opposé pour une augmentation ou une diminution quelconque de l'angle. Telle est la question fondamentale de la *Trigonométrie*. Il ne faudrait pas penser qu'il suffirait d'obtenir premièrement la valeur du côté pour un angle *sixième*, puis pour un angle *douzième*, etc., et cela par la formule donnée en géométrie, laquelle permet de calculer la valeur du côté d'un polygone double de côtés lorsqu'on connaît le côté du premier polygone et le rayon du cercle circonscrit. La moindre réflexion ferait voir que ce procédé ne pourrait fournir la longueur du côté que pour des angles doubles l'un de l'autre, et que les angles

d'un nombre quelconque de degrés resteraient sans solution possible. On est donc obligé de recourir à un autre moyen qui puisse donner le côté pour toute valeur de l'angle.

Admettons que deux côtés varieront en faisant un angle constant qui sera *tiers* et que le troisième conservera la même longueur pour tous les cas. Envisageons, pour fixer les idées, le triangle équilatéral IOB (fig. 1). La ligne IB fait avec OB



un angle *tiers*. Si nous faisons mouvoir le point I dans le sens de IB il s'approchera de plus en plus du point B : supposons-le arrivé en H. Ce sera alors la ligne HC qui fera avec OB prolongé un angle tiers HCO. On voit facilement que l'oblique abaissée de l'extrémité du rayon sur l'autre côté diminuera avec l'angle, et qu'elle augmentera jusqu'à l'angle demi où elle atteindra sa valeur *maximum*.

Pour abréger l'expression, et pour n'employer que le moins possible des mots nouveaux, nous appellerons cette ligne le *sinus* de l'arc ou de l'angle ; OC prendra le nom de *cosinus* et AC sera la *tangente*, puis OA la *sécante*. Ces dénominations sont loin d'être rationnelles, mais l'usage que l'on en fait me décide à les conserver ici.

Il résulte des conventions précédentes que pour un angle

tiers, le *rayon* est égal au *sinus*, est égal au *cosinus*; que pour un angle *sixième*, la *tangente* est égale au *sinus*. Pour un angle demi le *sinus* est égal au *rayon* divisé par la racine deuxième de 3 sur 4; la *tangente* est le double de la *sécante* de l'angle *tiers*, et le *cosinus* est la moitié du *sinus*. L'angle *deux tiers* a le même *sinus* que celui de l'angle *tiers*, son *cosinus* est égal au *rayon* et pour ce cas la *tangente* est *infinie*.

On voit par là quel changement éprouvent les lignes trigonométriques par la variation de l'angle ou de l'arc et comment on peut les mettre en relation les unes avec les autres. Rien n'est plus facile que de tirer, des considérations précédentes, les formules qui doivent servir de fondement à tous les calculs trigonométriques; et il est inutile d'insister pour montrer les simplifications considérables qui résultent du rétablissement de la véritable unité. Il est prouvé pour la centième fois que l'on a fait fausse route en géométrie et que le *carré* ainsi que l'angle *droit* y ont introduit de nombreuses complications. Je n'entrerai pas ici dans l'énumération de tous les écarts auxquels ils entraînaient, car il est clair au premier abord que les lignes trigonométriques que l'on avait choisies, juraient avec la nature même des choses, qu'on leur faisait occuper des positions inharmoniques et que l'on était forcé d'en multiplier le nombre d'une manière presque ridicule. Tout, dans la trigonométrie telle qu'elle est faite, ressemble à une charpente factice impropre à soutenir le moindre édifice. Cependant il faut avouer qu'elle était d'une élasticité surprenante, et que, les *cosécantes* et les *cotangentes* aidant, on faisait se développer un régiment de lignes qui produisait la plus délicieuse fantasmagorie.

La première question que l'on se pose, après avoir formulé les relations des lignes trigonométriques entre elles, par la comparaison de triangles semblables, faciles à choisir, est de savoir comment, étant donnés les sinus de deux arcs, on parvient à trouver le sinus de leur somme et de leur différence. Le seul examen de la fig. 1 suffit pour voir que rien n'est plus simple que la détermination de ces différentes va-

leurs et que la considération de quelques triangles semblables conduirait promptement à des formules qu'il est inutile de donner ici, et desquelles il serait facile de déduire le sinus du double d'un arc ou de la moitié de cet arc.

A l'aide de ces différentes formules on construirait les tables des lignes trigonométriques sans qu'il soit nécessaire de prendre pour le rayon la valeur 10, élevée à la dixième puissance. On peut ici prendre le rayon égal à *un*, puisque, *dans tous les cas,* il y a toujours une ligne trigonométrique qui lui est supérieure. Dans tous les angles plus petits que l'angle *tiers* le cosinus est plus grand que le rayon, et dans tous les angles compris entre *un tiers* et *deux tiers* le sinus et la tangente sont plus grands que le rayon. Ajoutons que les approximations seront à peu près l'exactitude, car on sait que si le sinus est la perpendiculaire, l'excès de l'arc sur son sinus est moindre que le quart de la troisième puissance de cet arc. Or si le sinus devient l'oblique que nous adoptons, il est évident que la différence de l'arc et du sinus sera beaucoup moins considérable et que l'erreur deviendra réellement inappréciable.

En considérant la fig. 1 on voit que l'arc IHB est plus grand que son sinus IB et plus petit que sa tangente AC ; si nous envisageons au contraire l'arc HB, qui est la moitié du premier, on s'aperçoit que le sinus est égal à la tangente et que cette tangente est plus grande que l'arc : il y a donc eu un moment où le sinus a été égal à l'arc. La détermination de ce point permettrait d'avoir pour les sinus des valeurs exactes, et résoudrait définitivement le désespérant problème de la quadrature du cercle.

La trigonométrie, telle qu'elle est enseignée, après avoir fait la théorie des lignes qui lui servent de base, aborde la résolution des triangles et s'arrête, comme cas particulier et simple, à ceux qui ont un angle *demi*. Nous avons évidemment, par le choix de l'oblique, fait entrer dans cette catégorie tous les triangles qui ont un angle *sixième*, *tiers* ou *deux tiers*, et dont les éléments peuvent être appréciés avec la plus

grande facilité. La chose est tellement visible qu'il n'est besoin d'aucune explication et qu'il y a lieu à renvoyer à un livre élémentaire sur la matière les formules servant à exprimer la valeur de ces divers éléments.

Ce travail fait, on comprend qu'il n'y a plus qu'à entrer dans le champ de l'application et à montrer comment les formules trouvées servent à la détermination de certaines quantités dont on ne peut avoir la mesure d'une manière directe. Premièrement on peut recourir à ces formules pour obtenir la hauteur d'un édifice, d'une montagne, etc., puisqu'il s'agirait d'avoir la longueur d'un côté d'un triangle lorsque ce triangle serait déterminé. Mais il est facile de s'apercevoir qu'au moyen de l'oblique on peut avoir les hauteurs dont il s'agit sans qu'il soit nécessaire de recourir à la moindre formule trigonométrique. Supposons (fig. 1) qu'on ait à trouver la longueur de RK représentant la hauteur d'une tour par exemple. En faisant au point O, l'angle *tiers* RKO et en mesurant KO qui est la moitié de RO, on aurait immédiatement KR. Dans le cas où l'angle tiers ne pourrait pas être employé par suite d'obstacles insurmontables, il faudrait avoir recours aux angles sixième et deux tiers et même à l'angle quart qui fourniraient également la valeur de RK.

Si maintenant il était impossible de faire ces angles dans le plan RKO, on pourrait les faire dans le plan NKO, KN représentant la tour couchée sur le terrain dans une direction perpendiculaire à DC. Il n'y aurait plus alors qu'à trouver le point O, ou tout autre qui ferait avec DC un des angles tiers, quart, sixième dont il a été question et qui donneraient presque sans calcul la quantité cherchée.

Deuxièmement, on a souvent recours à la trigonométrie pour évaluer les distances entre des points inaccessibles. Or, nous allons voir que ce but peut être atteint par un procédé tellement simple qu'il y aura lieu de penser que les formules trigonométriques n'auront plus aucun usage en ces matières, et qu'au lieu de traîner après soi tables de logarithmes, tables de sinus, graphomètre, l'opérateur aura tout bonnement

besoin de mettre dans sa poche une équerre d'arpenteur, sur laquelle on aura pratiqué un angle tiers.

Prenons les deux points R et I (fig. 1), que nous supposerons inaccessibles. Supposons que l'on soit placé sur la base DC. Trois cas peuvent se présenter :

Premier cas. — Il peut se faire que les deux points R et I soient dans une position telle que l'on puisse faire au point O l'angle tiers ROI. Il est clair alors qu'on obtiendrait immédiatement RO et OI au moyen des projections KO et OP, et que l'on aurait : $RI^2 = RO^2 + OI^2 - RO \times OI$.

Deuxième cas. — Supposons qu'il s'agisse de déterminer la distance RE et que l'on se trouve toujours placé sur la base DC.

Si nous faisons les angles *tiers* ESO et ROK, nous pourrons obtenir ES et RO par les projections SO, KO. Le triangle STO étant équilatéral nous aurons :

$$RE^2 = RT^2 + TE^2 - RT \times TE.$$

Mais

$$RT = RO - TO = RO - SO;$$

de même

$$TE = ES - ST = ES - SO.$$

Il viendra donc

$$RE^2 = (RO - SO)^2 + (ES - SO)^2 - RT \times TE.$$

Toutes les quantités qui entrent dans cette égalité sont connues à l'exception de RE, qui le devient au moyen des opérations les plus simples.

Troisième cas. — Soient les deux points inaccessibles R et F et sa base DC. On demande la longueur de la droite RF comprise entre ces deux points. Faisons les angles tiers FPB et ROD ou ROK. Les projections PG et KO donneront la valeur de PF et de RO ; et nous aurons immédiatement

$$RF^2 = RM^2 + MF^2 - RM \times MF.$$

Mais le triangle OMP devant être équilatéral, il vient

$$RF^2 = (RO + OP)^2 + (FP + OP)^2 - (RO + OP) \times (FP + OP).$$

Il résulte de là que, quelle que soit la position des points inaccessibles relativement à la base, on peut toujours trouver la distance qui les sépare sans récourir à aucune formule trigonométrique, n'ayant d'autres soins à prendre que de se munir du plus simple des instruments, l'*équerre d'arpenteur.*

Cela étant établi, il n'y a aucun effort à faire pour voir que ce procédé peut être avantageusement employé au levé des plans et à l'arpentage. Si l'on avait par exemple à lever le plan de la surface RIF, lors même que l'on ne pourrait se mouvoir sur aucun de ses côtés, on déterminerait facilement, comme on l'a indiqué plus haut, la longueur des lignes RI, IF et RF qui serviraient à donner une figure égale ou semblable au triangle RIF. Il est clair que l'on pourrait, par la même marche, en trouver la surface. De sorte qu'il reste prouvé, que toutes les opérations sur le terrain relatives à la géodésie, peuvent être faites rapidement et d'une manière très simple par la méthode que nous avons exposée, sans demander aucun secours aux sinus et aux cosinus.

La théorie et les considérations qui précèdent prouvent jusqu'à la dernière évidence que l'introduction des unités logiques dans la Géométrie ne détruit en rien son ensemble et que le tout dont elle est formée prend au contraire un caractère rationnel qui relie plus visiblement et plus fortement entre elles les différentes parties dont il se compose. On peut même dire que l'adoption de l'oblique donne réellement un bras de plus à ce grand corps qui n'en possédait qu'un et qui agissait avec tant de lenteur. Désormais il pourra se mouvoir avec plus d'élégance et plus de vie. Il est clair que l'augmentation des forces dont il jouissait d'abord ne saurait lui ôter aucun de ses avantages, et que la *Trigonométrie*, construite d'après les données posées en géométrie, loin de devenir impossible, s'établit d'une manière très naturelle et très simple. Quoi de plus vrai que cette proposition cent fois répétée à propos de

méthode, qu'il faut aller du simple au composé? Or c'est en nous y conformant rigoureusement que nous sommes arrivé à poser les bases principales d'une trigonométrie vraiment rationnelle, c'est-à-dire qui part du triangle équilatéral pour finir par le triangle le plus compliqué.

L'emploi de l'angle tiers, conjointement avec l'angle droit, débarrassera la science de beaucoup d'entraves, et la rendra plus libre et plus puissante. Elle pénétrera avec plus de facilité partout où elle s'introduisait primitivement, et donnera des secours non moins importants à l'astronomie, à la géographie, à la navigation. Je n'ai pas besoin d'ajouter que les résultats qu'elle a acquis dans la position où elle se trouve peuvent être transformés immédiatement, et que toute expression peut prendre facilement la forme relative à sa nouvelle signification. J'ajoute toutefois qu'il faut recourir le moins possible à ce moyen, qui consiste à multiplier une formule donnée par un certain rapport déterminé à cet effet. Il est beaucoup plus logique de chercher l'expression de telle ou telle quantité en ne s'appuyant que sur les bases de la méthode à laquelle elle appartient. Si l'on demandait par exemple quelle est la formule qui donne la surface d'un triangle quelconque en fonctions des trois côtés lorsque le triangle équilatéral est l'unité de surface, on pourrait assurément obtenir ce résultat en divisant la formule qui donne cette surface exprimée en carrés par le rapport racine deuxième de trois sur quatre, mais il vaut mieux déterminer la formule appropriée au cas dont il s'agit, d'une manière directe, en suivant une marche à peu près analogue à celle qui a conduit à trouver celle dont on fait usage.

Telles sont, en résumé, les bases fondamentales sur lesquelles doit reposer une *Trigonométrie* se déduisant rigoureusement des considérations géométriques établies dans les autres parties de ce travail. Il y aura donc bien un tout complet qui reliera entre elles les diverses branches de la géométrie, et qui embrassera aussi l'algèbre comme nous le verrons plus tard. On peut espérer sans trop de présomption que des difficultés impossibles à vaincre à l'aide d'une méthode illogique trou-

veront leur solution par celle que nous exposons et que nous croyons naturelle. Il faut qu'il n'y ait pas un seul résultat, obtenu de n'importe quelle manière, qui ne puisse trouver son explication, montrer sa raison d'être ; c'est même en cela que consiste la véritable pierre de touche de toute théorie. Tout système qui se heurte à un obstacle qu'il ne peut vaincre est un système faux ; le caractère le plus indispensable à la certitude lui fait défaut, et la seule raison qui pourrait le faire triompher et l'établir, le condamne à l'impuissance et le fait rejeter pour toujours.

Examinons maintenant, afin de donner satisfaction aux esprits pratiques, comment la méthode que nous recommandons parviendra à se faire adopter et à régner définitivement. L'esprit routinier, dit-on, s'opposera de toutes ses forces à son établissement, et n'épargnera rien pour lui barrer la route et l'empêcher de se propager ; il emploiera la ruse et la mauvaise foi, soulèvera des objections spécieuses et sans valeur, lui fera dire ce qu'elle repousse, et finira par en retarder la réalisation, peut-être même par l'anéantir. On peut répondre sans aucune hésitation que toutes ces armes, et beaucoup d'autres auxquelles on pourrait avoir recours, fussent-elles employées sans ménagement, sont fort peu à craindre. Personne n'ignore combien de fois on leur a demandé appui, et chacun sait qu'elles n'ont jamais servi à remporter la moindre victoire. On résiste presque impunément à leurs attaques, et, bien loin de nuire à l'esprit chercheur qui est toujours certain de les rencontrer à chaque instant, elles contribuent à augmenter ses forces en l'obligeant à être constamment sur ses gardes. Ce serait une faiblesse indigne, une véritable lâcheté que de faire à leur vue reculer le moindre effort, disparaître le plus faible désir de conquête dans le vaste domaine de la connaissance : on peut les braver sans cesse lorsqu'on a la raison pour escorte et pour guide.

Quant aux objections que l'on peut présenter, il en est une que j'ai cru inutile de me faire et qui pourrait cependant avoir une certaine valeur auprès de quelques personnes. On dit que

l'on a choisi le *carré* pour unité de surface, et que l'on doit continuer d'en faire usage parce que les objets façonnés par la main de l'homme ont en général une forme rectangulaire, et qu'il importe de choisir pour unité la figure qui s'approche le plus de cette forme elle-même. Il est vrai que l'angle droit domine dans la construction des édifices, et qu'il faudrait, pour être conséquent, adopter le rectangle et non le *carré*, pour unité de surface; mais l'irrégularité est tellement grande dans les propriétés territoriales que le plan cadastral renferme les figures les plus bizarres, et qu'il n'y en a réellement aucune qui soit un rectangle parfait, un carré parfait. Maintenant, le contraire aurait lieu, on ne verrait partout que rectangles et carrés, que parallélipipèdes et cubes, que cela ne justifierait pas l'emploi du carré et du cube comme unités des surfaces et des volumes. La Géométrie est une science transcendantale qui ne se compose que d'idées pures, et qui ne doit se plier en rien aux exigences de l'empirisme ; son unité doit se tirer de sa nature même et non des formes que tel ou tel individu peut donner à sa maison, à sa chambre ou à son jardin.

Une objection d'une autre nature a été faite par un savant professeur. On a pris le carré pour unité, disait-il, parce que la perpendiculaire est un *minimum*. Pressé de développer sa pensée et de montrer comment ce distinct de la perpendiculaire pouvait constituer son titre à faire prévaloir le *carré*, il a ajouté quelques phrases qui ont fait suffisamment comprendre qu'il n'y avait là qu'un mot ; et que la ligne, jouissant de la propriété d'être la plus courte d'un point à une ligne, restait indifférente à l'espèce d'unité, et ne défendait en rien la cause de principes et d'axiomes chimériques, de démonstrations et de preuves ridicules, et qu'elle ne forçait nullement l'esprit humain à se torturer dans des complications interminables.

Il n'y a donc rien de sérieux dans les observations qui précèdent, et la méthode à laquelle elles s'attaquent ne s'en trouve nullement affaiblie. On peut affirmer *a priori* que son avenir est assuré, et que sous peu on sera obligé de faire un

pas dans la voie qu'elle a ouverte, puis, enfin, d'y marcher jusqu'au bout. Il n'y a donc aucune crainte à avoir pour le triomphe de la vérité ; l'expérience de tous les jours prouve du reste qu'elle marche beaucoup plus rapidement qu'on ne l'imagine, et qu'au milieu des luttes où elle paraît si fortement engagée elle a toujours un moment pour agrandir son domaine. Ces luttes peuvent être plus ou moins longues ; mais on ne saurait perdre confiance quand on songe qu'il est dans la nature de la vérité de ne pouvoir être jamais vaincue.

Fin de la quatrième livraison, publiée dans l'*Ami des Sciences*, n° du 21 juin 1857.

Paris. — Imprimerie de J.-B. Gros et Donnaud, rue Cassette, 9.